

2022 年南京大学强基测试数学试题

一、初试

1. 函数 $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{15-3x}$ 的值域为_____.
2. 设 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则函数 $y = \sin^2 x \cos x$ 的最大值为_____.
3. 已知 x, y, z 满足 $x+y+z=1$, 则 $x^2+4y^2+9z^2$ 的最小值为_____.
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a \cos C - b \cos^2 A = a \sin A \sin B - c \sin A$, 则 $\tan A$ 的值为_____.
5. 已知实数 x, a_1, a_2, y 等成等差数列, x, b_1, b_2, y 成等比数列, 则 $\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1 b_2}$ 的取值范围是_____.
6. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2\sqrt{2}, \vec{a} \cdot \vec{b}=6$, 且 $(\vec{a}+\vec{c})(\vec{b}+2\vec{c})=0$, 则 $|\vec{b}+\vec{c}|$ 最小值为_____.
7. 已知直线 $y=ax+2$ 与三次曲线 $y=x^3-ax$ 有三个不同交点, 则 a 的取值范围为_____.
8. 在棱长为 6 的正四面体 $ABCD$ 中, M 为面 BCD 上一点, 且 $|AM|=5$, 设异面直线 AM 与 BC 所成的角为 α , 则 $|\cos \alpha|$ 的最大值为_____.
9. 方程 $x_1+x_2+x_3+3x_4+3x_5+5x_6=7$ 的非负整数解的个数为_____.
10. 设 F, l 分别为双曲线 $\frac{(x-4)^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的右焦点与右准线, 椭圆 Γ 以 F 和 l 为其对应的焦点及准线, 过 F 作一条平行于 $y=\sqrt{3}x$ 的直线, 交椭圆 Γ 于 A, B 两点, 若 Γ 的中心位于以 AB 为直径的圆外, 则椭圆离心率 e 的范围为_____.

二、复试

11. 已知整数 $n > 1$, 证明: $\left(\frac{n+1}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.
12. 已知 $0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi$, 且 $\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{2}$, 求 α, β 的值.
13. 设 $x^2 - 6x + 1 = 0$ 的两个根分别为 x_1, x_2 , 设 $a_n = \frac{x_1^n + x_2^n}{2}$.

(1) 求证: $a_n \in \mathbf{Z}$;

(2) 求 a_{2009} 的个位数字.

2022 年南京大学强基测试数学试题

一、初试

【1 题答案】

【答案】 $[1,2]$

【2 题答案】

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

【3 题答案】

【答案】 $\frac{36}{49}$

【4 题答案】

【答案】 1

【5 题答案】

【答案】 $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

【6 题答案】

【答案】 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

【7 题答案】

【答案】 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

【8 题答案】

【答案】 $\frac{1}{5}$

【9 题答案】

【答案】 81

【10 题答案】

【答案】 $\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{3}}, 1\right)$

二、复试

【11 题答案】

【答案】 证明见解析

【12 题答案】

【答案】 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$

【13 题答案】

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 1

