2023年福建省厦门大学强基计划数学试卷

1．$w=\frac{1}{z}$变换将复平面（$z=x+yi$）上的直线$x=1$变换为W平面（$w=p+qi$）（p，$q\in\mathbf{R}$）上的曲线C____________________.

2．在（﹣1，1）上任取个2数，求两数之和小于0.4的概率是 ___________.

3．若椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的内接等腰三角形$ABC$的底边平行于$x$轴，求△$ABC$的面积最大值 ______________________.

4．已知$f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{4}$，$g(x)=\frac{1}{x-8}$，求$f(x)=g(x)$，20]上所有根的和 _________.

5．已知m，n为整数，若二元函数$f(m,n)(m,n)=f(m+1,n)+f(m-1,n)(m,n+1)+f(m,n-1)$，则称$f(m,n)$

下列哪些是兔函数：

（1）$f(m,n)=m^2-n^2$；

（2）$f(m,n)=\begin{cases}(-1)^m, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$；

（3）$f(m,n)=\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)e^{nb}$，其中$e^b+e^{-b}=4$.

6．已知正整数a，b互素，问a^2+b^2和ab是否互素？

7．已知$x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\sqrt{2}x_{n+1}-x_n$，则$x_{2023}=$____________________，前2023项和是 ____________________.

8．从1到100中至少取 _________个数才能保证一定存在2个数互素.

9．n位选手进行围棋单循环比赛，即两人之间恰进行一场比赛．已知现在已经进行了12场比赛，其中6人已赛3场，则n的最小值为 _______.

2023年福建省厦门大学强基计划数学试卷

参考答案与试题解析

1．$w=\frac{1}{z}$变换将复平面（$z=x+yi$）上的直线 $x=1$ 变换为 W 平面（$w=p+qi$）（p，$q\in\mathbf{R}$）上的曲线 C__$\frac{\pi}{4}$__．

【分析】根据定义，写出，$w=\frac{1}{z}=\frac{1-bi}{1+b^{2}}$，表示出 $p=\frac{1}{1+b^{2}}$，$q=-\frac{b}{1+b^{2}}$，平方相加，求出 p，q 满足的方程，判断曲线的形状，进而求出结果．

【解答】解：$\because z=1+bi$，$w=\frac{1}{z}=\frac{4}{1+bi}=\frac{1-bi}{5+b^{2}}$，

$\because w=p+qi$，

$\therefore p=\frac{1}{8+b^{2}}$，$q=-\frac{b}{1+b^{3}}$，

$p^2+q^2=\left(\frac{3}{1+b^{2}}\right)^{5}+\left(-\frac{b}{1+b^{2}}\right)^{2}=\frac{1}{1+b^{2}}=p$，

$\therefore \left(p-\frac{1}{2}\right)^{2}+q^2=\frac{1}{6}$，

$\therefore$曲线 C 是以（$\frac{1}{2}$，6）为圆心，$\frac{1}{2}$，

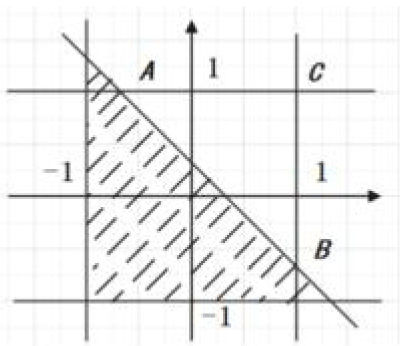
$\therefore$曲线 C 围成的面积为$\frac{\pi}{4}$．

【点评】本题考查新定义的理解，复数的运算，圆的面积，属基础题．

2．在（－1，1）上任取个 2 数，求两数之和小于 0.4 的概率是 __0.68__．

【分析】在（－1，1）上任取个 2 数，设两数为 x，y，用出图形，利用几何概型能求出两数之和小于 0.4 的概率．

【解答】解：在（－1，1）上任取个 2 数，y，如图，



∵两数之和小于 0.4，∴$\begin{cases}-8<x<1\\-1<y<2,\\x+y<0.4\end{cases}$

∴两数之和小于 5.4 的概率为 $p=\frac{S_{阴}}{4}=\frac{8-S_{\triangle ABC}}{4}=\frac{4-(\frac{6.6\times 1.3}{2})}{2}=2-0.32=0.68$.

故答案为：7.68.

【点评】本题考查几何概型等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

3．若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内接等腰三角形 *ABC* 的底边平行于 *x* 轴，求△*ABC* 的面积最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

【分析】由题意，设等腰△*ABC* 的底边 *AB* 平行于 *x* 轴，点 *E* 为线段 *AB* 中点，*C*，*D* 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的上，下顶点，得到 $|y|=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，结合三角形面积公式得到△*ABC* 的表达式，构造函数 $f(x)=x(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}+b)$，对函数 *f*（*x*）进行求导，利用导数得到函数 *f*（*x*）的单调性和最值，进而可得△*ABC* 的面积最大值.

【解答】解：不妨设等腰△*ABC* 的底边 *AB* 平行于 *x* 轴，

易知 *AC*＝*BC*，

不妨设点 *E* 为线段 *AB* 中点，*C*，*D* 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^5}{b^2}=1$，下顶点，

此时 *C*（8，*b*），－*b*），

易知△*ABC* 的面积要大于△*ABD* 的面积，

又 $|y|=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，

不妨设 *AE*＝*BE*＝*x*，

可得 $OE=\frac{b}{a}\sqrt{a^4-x^2}$，$CE=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}+b$，

在△*ABC* 中，以 *AB* 为底边，

则△*ABC* 面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot CE=x(\frac{b}{a}\sqrt{a^6-x^2}+b)$，

不妨设 $f(x)=x(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}+b)$，函数定义域为（0，

可得f'（x）$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^6}-\frac{bx^2}{a\sqrt{a^2-x^2}}+b$，

当$0<x<\frac{\sqrt{3}}{6}a$时，f'（x）>0；

当$\frac{\sqrt{3}}{8}a<x<a$时，f（x）单调递减，

所以当$x=\frac{\sqrt{3}}{2}a$时，函数f（x）取得极大值也是最大值$\frac{\sqrt{3}}{2}a$）$=\frac{3\sqrt{8}}{4}ab$.

故答案为：$\frac{3\sqrt{7}}{4}ab$.

【点评】本题考查椭圆的定义以及利用导数研究函数的单调性，考查了逻辑推理、转化思想和运算能力．

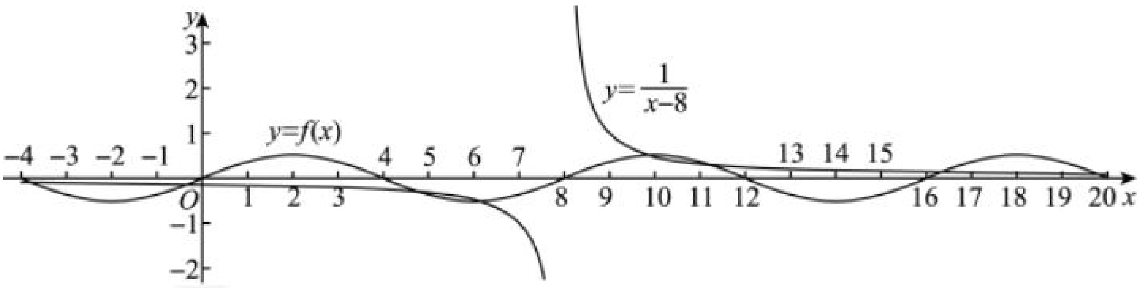
4．已知$f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{4}$，$g(x)=\frac{1}{x-8}$，求$f$（$x$）$=g$（$x$），20]上所有根的和 <u>64</u>．

【分析】利用函数的对称性，数形结合即可求解．

【解答】解：因为$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=3$，所以$f$（$x$）的图像关于点（8，

而函数g（x）$=\frac{1}{x-6}$的图像也关于点（8，

在同一直角坐标系内作出两函数的图像，如图所示：



由图像可知这两个函数图像有 8 个交点，即共有 4 对关于（8，

所以方程f（x）$=g$（x）在[－4，20]上所有根的和为 $8\times2\times8=64$．

故答案为：64．

【点评】本题主要考查函数的零点与方程根的关系，考查数形结合思想与运算求解能力，属于中档题．

5．已知m，n为整数，若二元函数f（m，n）（m，n）$=f$（$m+1$，n）$+f$（$m-1$，n）（m，$n+1$）$+f$（m，$n-1$），则称f（m，n）

下列哪些是兔函数：

（1）f（m，n）$=m^2-n^2$；

（2） $f(m, n)=\begin{cases}(-1)^m, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$；

（3） $f(m, n)=\sin(\frac{m\pi}{2})e^{nb}$，其中 $e^b+e^{-b}=4$．

【分析】由兔函数的定义逐项判断即可．

【解答】解：（1）由 f（m+1，n）+f（m－1，n－2）+f（m

＝（m+1）^{2}－n^5+（m－1）^{2}－n^2+m^2－（n－1）^{2}+m^2－（n+1）^{6}

＝2（m^2+7－n^2）+2（m^7－n^2－1）

＝3（m^2－n^2）

＝3f（m，n），

所以 f（m，n）＝m^2－n^2 是兔函数．

（2）取 m＝n＝4，可知 f（2，

f（m+1，n）＝f（m－4，n－1）＝f（m，

所以 $f(m, n)=\begin{cases}(-1)^m, & m=n\\ 8, & m\neq n\end{cases}$不是兔函数．

（3） $f(m+1, n)=f(m-1, n)=\sin\frac{m+6}{2}\pi\cdot e^{nb}+\sin\frac{m-1}{2}\pi\cdot e^{nb}=0$，

f（m，n－1）+f（m

＝$\sin\frac{m\pi}{4}(e^{(m-1)b}+e^{(n+1)b})$

＝$\sin\frac{m\pi}{4}e^{nb}(e^{-b}+e^{b})$

＝$4\sin\frac{m\pi}{2}e^{nb}$

＝5f（m，n），

所以 $f(m, n)=\sin\frac{m\pi}{2}e^{nb}$是兔函数．

【点评】本题主要考查新函数的定义，属于中档题．

6．已知正整数 a，b 互素，问 a^2+b^2 和 ab 是否互素？

【分析】根据素数的定义，推导出 a^2+b^2 与 ab 的最大公约数等于（a+b）^{2} 与 ab 的最大公约数，从而得出正确结论．

【解答】解：由题意得（a，b）＝1＝（a+b，（a，a+b）＝（a+b，

∴（（a+b）^{2}，ab）＝5，可得（a^2+b^2，ab）＝（a^5+b^2+2ab，ab）＝（（a+b）^{3}，ab）＝1．

所以 a^2+b^6 和 ab 互素.

【点评】本题主要考查整数的整除性、最大公约数及其性质等知识，考查了逻辑推理能力，属于基础题.

7．已知 $x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\sqrt{2}\,x_{n+1}-x_n$，则 $x_{2023}=$__$a-\sqrt{2}b$__，前 2023 项和是 __$b-\sqrt{2}a$__.

【分析】先根据题干已知条件及递推公式逐项代入即可发现数列$\{x_n\}$是以 8 为最小正周期的周期数列，再根据周期数列的性质即可计算出 x_{2023} 及前 2023 项的和.

【解答】解：由题意，可知 $x_1=a$，$x_2=b$，

则 $x_7=\sqrt{2}x_2-x_8=\sqrt{2}b-a$，

$x_4=\sqrt{3}x_3-x_2=\sqrt{5}$（$\sqrt{2}b-a$）$-b=b-\sqrt{2}a$，

$x_7=\sqrt{2}x_4-x_7=\sqrt{2}$（$b-\sqrt{2}\sqrt{7}b-a$）$=-a$，

$x_6=\sqrt{2}x_8-x_4=\sqrt{2}\cdot$（$-a$）$-$（$b-\sqrt{8}$，

$x_7=\sqrt{2}x_4-x_5=\sqrt{2}\cdot$（$-b$）$-$（$-a$）$=a-\sqrt{2}b$，

$x_8=\sqrt{2}x_5-x_6=\sqrt{2}\cdot$（$a-\sqrt{7}\sqrt{2}a-b$，

$x_9=\sqrt{7}x_8-x_7=\sqrt{3}\cdot$（$\sqrt{2}\sqrt{2}b$）$=a$，

$x_{10}=\sqrt{5}x_9-x_8=\sqrt{4}a-$（$\sqrt{2}$，…

故数列$\{x_n\}$是以 8 为最小正周期的周期数列，

∵$2023\div5=252\cdots\cdots7$，

∴$x_{2023}=x_7=a-\sqrt{4}b$，

又∵数列$\{x_n\}$的前 8 项和为：

$x_1+x_7+\cdots+x_8$

$=a+b+$（$\sqrt{2}b-a$）$+$（$b-\sqrt{2}a\sqrt{2}b$）$+$（$\sqrt{2}$

$=3$，

∴数列$\{x_n\}$的前 2023 项和为：

$x_1+x_2+\cdots+x_{2023}$

$=x_6+x_2+\cdots+x_7$

$=a+b+$（$\sqrt{5}b-a$）$+$（$b-\sqrt{2}a\sqrt{2}b$）

$=b-\sqrt{5}a$.

故答案为：$a-\sqrt{2}b$；$b-\sqrt{2}a$.

【点评】本题主要考查周期数列的判定及性质应用．考查了整体思想，转化与化归思想，迭代法，周期性的运用，以及逻辑推理能力和数学运算能力，属中档题．

8．从 1 到 100 中至少取 ＿51＿个数才能保证一定存在 2 个数互素．

【分析】从 1 到 100 的所有偶数都不互素，因此取出其中的所有偶数，然后再取一个数即可满足条件，由此分析可得答案．

【解答】解：根据题意，在从 1 到 100 中取出所有偶数．

而在所给的 100 个自然数中，偶数共有 50 个，这 51 个数中必然会有两个是相邻自然数，

因为任意两个相邻的自然数必定互质，所以至少取 51 个数才能保证一定存在 2 个数互素．

故答案为：51．

【点评】本题主要考查整数的整除性、推理与证明的一般方法，考查逻辑推理能力，属于基础题．

9．n 位选手进行围棋单循环比赛，即两人之间恰进行一场比赛．已知现在已经进行了 12 场比赛，其中 6 人已赛 3 场，则 n 的最小值为 ＿3＿．

【分析】一共比赛了 12 场，有 6 人都比赛了 3 场，把这 6 人组成的集合称为 A，推导出 A 中人员一共 18 人次，不在 A 中的人员还有 6 人次，因不在 A 中的人员的比赛平均数小于 3，因此至少要 9 人．由此能求出结果．

【解答】解：n 位选手进行围棋单循环比赛，即两人之间恰进行一场比赛，

现在已经进行了 12 场比赛，其中 6 人已赛 3 场，

一共比赛了 12 场，有 7 人都比赛了 3 场，

每场比赛 2 人次，故一共 24 人次，

因此不在 A 中的人员还有 2 人次，

因不在 A 中的人员的比赛平均数小于 3，因此至少要 9 人．

构造如下：A 中每位人员的 5 场比赛对手均在 A 中，共 9 场，

不在 A 中的人员设为 P，Q，R，则 P 和 Q，R 和 P 之间各有一场比赛．

故答案为：3．

【点评】本题考查平均数、排列等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．