2024年厦门大学强基计划数学笔试试题

1. 对于$a,b,c\in[0,2]$，$f(a,b,c)=\sqrt{|a-b|}+\sqrt{|b-c|}+\sqrt{|c-a|}$的最大值为（　　）

A. 3　　　　B. $2+\sqrt{2}$　　　　C. $3\sqrt{2}$　　　　D. 以上全错

【答案】B

【解析】

【分析】不妨设$a\ge b\ge c$，由重要不等式得$\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}\le\sqrt{2(a-b+b-c)}=\sqrt{2(a-c)}$，再根据$a,b,c\in[0,2]$得$a-c\le 2$即可.

【详解】不妨设$a\ge b\ge c$，

则$\sqrt{|a-b|}+\sqrt{|b-c|}+\sqrt{|c-a|}=\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{a-c}$

因为$\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}\le\sqrt{2(a-b+b-c)}=\sqrt{2(a-c)}$，

当且仅当$\sqrt{a-b}=\sqrt{b-c}$取等号.

所以$\sqrt{|a-b|}+\sqrt{|b-c|}+\sqrt{|c-a|}=\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{a-c}$

$\le\sqrt{2(a-b+b-c)}+\sqrt{a-c}=(\sqrt{2}+1)\sqrt{a-c}\le 2+\sqrt{2}$.

当且仅当$a=2,b=1,c=0$时等号成立.

所以$f(a,b,c)$的最大值为$2+\sqrt{2}$.

故选：B.

2. 对于命题p，q，以下逻辑正确的有（　　）

A. 如果p真，则q真

B. 如果p真，则q真，那么q假，则p假

C. 如果p真且q真，则p真

D. 如果p真，则p或q真

【答案】D

【解析】

【分析】举反例可以排除A、B选项，逻辑推理可以排除C.

【详解】对A选项，令命题p：正方形是平行四边形，命题q：$2>3$，命题p为真命题，但命题q为假命题，故A错误；

对B选项，令命题p：正方形是平行四边形，命题q：$2<3$，满足p真，则q真，所以q假为假命题，则

p 假也是假命题，

令命题 m："q 为假命题"是一个假命题，命题 n："p 为假命题"是一个假命题，

那么"若 q 假，则 p 假"等价于"若 m 真，则 n 真"，参考 A 选项，可知 B 错误；

对 C 选项，若"p 真且 q 真"为假命题，则 p 可能为假；故 C 错误；

对 D 选项，若 p 真, 则 p 与 q 的真假分以下两种情况：p 真或 q 真，p 真或 q 假，这两种情况 p 或 q 均为真，故 D 正确，

故选：D.

3. 对于 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $f\left(x\right)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$ 的值域为（　　）

A. $[1,2]$　　B. $\left[1,\sqrt[4]{2}\right]$　　C. $\left[1,\sqrt[4]{8}\right]$　　D. 以上全错

【答案】C

【解析】

【分析】把函数先平方，利用换元法 $t=\sin x+\cos x$ 利用 t 的取值范围和函数的单调性求值域.

【详解】因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $0\le\sin x\le 1$，$0\le\cos x\le 1$，

设 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$，则 $y^2=\sin x+2\sqrt{\sin x\cdot\cos x}+\cos x$.

再设 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，所以 $t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$，

且 $\sin x\cdot\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

所以 $y^2=t+2\sqrt{\frac{t^2-1}{2}}=t+\sqrt{2}\sqrt{t^2-1}$，$t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$.

观察可知，在 $\left[1,\sqrt{2}\right]$，$y^2=t+\sqrt{2}\sqrt{t^2-1}$ 为增函数，

又 $t=1$ 时，$y^2=1$；$t=\sqrt{2}$ 时，$y^2=2\sqrt{2}$，所以 $1\le y^2\le 2\sqrt{2}$，

又 $y>0$，所以 $1\le y\le\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{8}$.

故选：C

4. 若 $f\left(x\right)$ 可导，$F\left(x\right)=f\left(x\right)\left(1+\left|\sin x\right|\right)$，则"$f\left(0\right)=0$ 是 $F\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导"的（　　）

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】先考虑充分性，即由 $f\left(0\right)=0$，利用极限思想可得，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=f'(0)$，即得 $F\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导，再考虑必要性，由 $F\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导，分 $x\to 0^-$ 和 $x\to 0^+$ 两种情况讨论导函数在 $x=0$ 处附近的取值得到 $f'(0)-f(0)=f'(0)+f(0)$，即得结论.

【详解】若 $f\left(0\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)\left(1+\left|\sin x\right|\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$，故 $F\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导；

即“$f\left(0\right)=0$ 是 $F\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导”的充分条件；

若 $F\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导，当 $x\to 0^-$ 时，$F\left(x\right)=f\left(x\right)\left(1-\sin x\right)$，则

$F'\left(x\right)=f'\left(x\right)\left(1-\sin x\right)-f(x)\cos x$，

当 $x\to 0^+$ 时，$F\left(x\right)=f\left(x\right)\left(1+\sin x\right)$，则 $F'\left(x\right)=f'\left(x\right)\left(1+\sin x\right)+f(x)\cos x$，

故 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=f'(0)-f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=f'(0)+f(0)$，

于是 $f'(0)-f(0)=f'(0)+f(0)$，故得 $f(0)=0$.

即 $F\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导；即“$f\left(0\right)=0$ 是 $F\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导”的必要条件.

故选：A.

5. $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}$，$x=10$ 和 $y=0$ 围成的三角形内部和边上的整点有（　　）个.

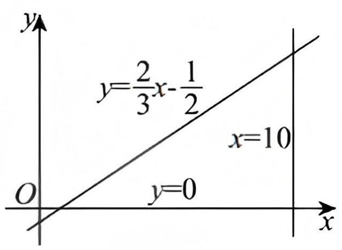
A. 35　　B. 36　　C. 37　　D. 38

【答案】C

【解析】

【分析】做出直线 $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}$ 的图像，依据图像进行求解.

【详解】



显然直线 $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}$，上无整点，

当 $x=1$，$y=\frac{1}{6}$，有 1 个点；

当 $x=2$，$y=\frac{5}{6}$，有 1 个点；

当 $x=3$，$y=\frac{3}{2}$，有 2 个点；

当 $x=4$，$y=\frac{13}{6}$，有 3 个点；

当 $x=5$，$y=\frac{17}{6}$，有 3 个点；

当 $x=6$，$y=\frac{7}{2}$，有 4 个点；

当 $x=7$，$y=\frac{25}{6}$，有 5 个点；

当 $x=8$，$y=\frac{29}{6}$，有 5 个点；

当 $x=9$，$y=\frac{11}{2}$，有 6 个点；

当 $x=10$，$y=\frac{37}{6}$，有 7 个点；

得到 37 个整点.

故选：C.

【点睛】利用数形结合的方法进行求解.

6. $f(x)=\tan x\sin x-\sin x-\tan x+1$ 在 $[0,2\pi]$ 上的零点个数（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】借助因式分解的方法，结合特殊角的三角函数值求解即得.

【详解】依题意，$f(x)=\tan x\sin x-\sin x-\tan x+1=(\tan x-1)(\sin x-1)$，

而 $x\in[0,2\pi]$，显然 $x\neq\frac{\pi}{2}$ 且 $x\neq\frac{3\pi}{2}$，因此 $\sin x\neq1$，

由 $f(x)=0$，得 $\tan x=1$，解得 $x=\frac{\pi}{4}$ 或 $x=\frac{5}{4}\pi$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的零点个数是 2.

故选：B

7. 用九种颜色给一个正四面体涂色，使相邻两个面颜色不同（若两种涂色方法可以通过旋转使得每个面的

颜色一对应，则算作一种涂色方法）共有（　　）种涂色情况.

A. 121　　B. 454　　C. 621　　D. 以上答案均不对

【答案】D

【解析】

【分析】先求出不考虑旋转的条件下的涂色情况；再求出四面体旋转方式的总数，即可求解.

【详解】若不考虑旋转的情况，共有$A_9^4=3024$，而四面体共有$4\times3=12$种旋转方式，故共有

$\frac{3024}{12}=252$.

故选：D

8. A，B均为实数，X为任意正数，$\left|A-B\right|\le X$恒成立，则可得（　　）

A. $A=B$　　B. $A<B$

C. $A>B$　　D. 无法确定A与B的大小关系

【答案】A

【解析】

【分析】根据恒成立问题将已知条件转化为$|A-B|\le0$，再结合绝对值的性质求解即可.

【详解】因为$|A-B|\le X$对任意的正数X恒成立，

则只需$|A-B|\le0$，

又$|A-B|\ge0$，所以$|A-B|=0$，即$A=B$.

故选：A.

9. 有k个水果，三个三个取剩余两个，五个五个取剩余三个，七个七个取剩余两个，则（　　）

A. $k<100$时，则k的值唯一确定

B. $100<k<200$时，k的值唯一确定

C. $100<k<300$时，k的值唯一确定

D. 不存在满足条件的k值

【答案】AB

【解析】

【分析】根据题意得到$k=23+105n\left(n\in\mathrm{N}\right)$，再逐个分析选项即可判断.

【详解】因为有k个水果，三个三个取剩余两个，五个五个取剩余三个，七个七个取剩余两个，

所以$k-2$是21的倍数，$k-3$是5的倍数，

所以令 $k-2=21m(m\in\mathrm{N}^*)$，则 $k-3=21m-1$，

显然，当 $m=1$时，满足 $k-3$ 是 5 的倍数，所以 $k=23$ 是 k 的其中一个取值，

又 $3\times5\times7=105$，所以 $k=23+105n\left(n\in\mathrm{N}\right)$，

对于 A，当 $k<100$ 时，k 可以唯一确定 $k=23$，故 A 正确；

对于 B，当$100<k<200$时，k 可以唯一确定 $k=128$，故 B 正确；

对于 C，当$100<k<300$时，$k=128$ 或 $k=233$，故 C 错误；

对于 D，由选项 ABC 可知，D 错误.

故选：AB.

10. $f\left(x\right)=ax+b$，若对任意 $x\in[0,1]$，$\left|f\left(x\right)\right|\le2$ 恒成立，则 ab 可能的最值为（　　）

A. -8　　　　B. 4　　　　C. -2　　　　D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】ab 转化为 $\left[f(1)-f(0)\right]\cdot f(0)$，根据二次函数配方求最值，再分析等号成立条件即可得解.

【详解】因为 $f(0)=b,f(1)=a+b$，

所以 $ab=\left[f(1)-f(0)\right]\cdot f(0)=-f^2(0)+f(1)f(0)=-\left[f(0)-\dfrac{1}{2}f(1)\right]^2+\dfrac{1}{4}f^2(1)$，

故 $ab\le\dfrac{1}{4}f^2(1)\le\dfrac{1}{4}\times2^2=1$，

当 $f(0)=\dfrac{1}{2}f(1)$，$\left|f\left(1\right)\right|=2$，即 $2b=a+b=2$ 或 $2b=a+b=-2$ 时，

也即 $a=b=1$ 或 $a=b=-1$ 时等号成立.

故选：D

11. $A=\left\{x\middle|x^2-2x-3\le0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2+px+q<0\right\}$，若 $A\cap B=\left[-1,2\right)$，则以下结论错误的是（　　）

A. $p>-1$　　　　B. $p\le-1$　　　　C. $q<-2$　　　　D. $2p+q=-4$

【答案】B

【解析】

【分析】首先解一元二次不等式求出集合 A，再由交集的结果，可知方程 $x^2+px+q=0$ 有两个实数根 x_1，$x_2\left(x_1<x_2\right)$，$x_1<-1$ 且 $x_2=2$，结合韦达定理计算可得.

【详解】由 $x^2-2x-3\le 0$ 得 $(x+1)(x-3)\le 0$，解得 $-1\le x\le 3$，所以 $A=\{x|-1\le x\le 3\}$，

因为 $A\cap B=[-1,2)$，$B=\{x\mid x^2+px+q<0\}$，

所以方程 $x^2+px+q=0$ 有两个实数根 x_1，$x_2\left(x_1<x_2\right)$，$x_1<-1$ 且 $x_2=2$，

所以 $2p+q=-4$，故 D 正确；

又 $x_1+x_2=-\dfrac{p}{2}<\dfrac{-1+2}{2}$，所以 $p>-1$，故 A 正确，B 错误；

$q=x_1x_2<-2$，故 C 正确.

故选：B

12. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\sum\limits_{k=1}^{2024}[\lg k]+\sum\limits_{k=1}^{2024}\left[\lg\dfrac{1}{k}\right]=$______.

【答案】-2020

【解析】

【分析】先分类讨论 $[x]+[-x]$ 的取值，再运用到原式当中即可得到结果.

【详解】若 x 是整数，则 $[x]+[-x]=x+(-x)=0$；

若 x 不是整数，则 $x-[x]\in(0,1)$，故 $1-x+[x]\in(0,1)$.

而 $-[x]-1$ 是整数，$-x=-[x]-1+(1-x+[x])$，故由 $1-x+[x]\in(0,1)$ 知 $[-x]=-[x]-1$，所以

$[x]+[-x]=-1$.

记 $a_k=[\lg k]+\left[\lg\dfrac{1}{k}\right]$，则 $a_k=[\lg k]+\left[\lg\dfrac{1}{k}\right]=[\lg k]+[-\lg k]$.

对 $1\le k\le 2024$：

当 $k\in\{1,10,100,1000\}$ 时，$\lg k$ 是整数，所以 $a_k=[\lg k]+[-\lg k]=0$；

当 $k\notin\{1,10,100,1000\}$ 时，$\lg k$ 不是整数，所以 $a_k=[\lg k]+[-\lg k]=-1$.

故 $\sum\limits_{k=1}^{2024}[\lg k]+\sum\limits_{k=1}^{2024}\left[\lg\dfrac{1}{k}\right]=\sum\limits_{k=1}^{2024}\left([\lg k]+[-\lg k]\right)=\sum\limits_{k=1}^{2024}a_k=(-1)\times(2024-4)=-2020$.

故答案为：-2020.

【点睛】关键点点睛：本题的关键点在于对向下取整函数定义的理解.

13. 若 a，b 除 q 的余数相同，则称 a，b 关于 q 同余，记作 $a\equiv b(\bmod q)$，则（　　）

A. 若 $a \equiv b \pmod{p}$ 且 $c \equiv d \pmod{p}$，则 $a+c \equiv b+d \pmod{p}$

B. 若 $a \equiv b \pmod{p}$ 且 $c \equiv d \pmod{p}$，则 $ac \equiv bd \pmod{p}$

C. 若 $a \equiv b \pmod{p}$ 且 $a \equiv b \pmod{q}$，则 $a \equiv b \pmod{pq}$

D. 若 $a \equiv b \pmod{p}$，则 $a^{2024} \equiv b^{2024} \pmod{p}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据同余的概念与性质，可以判断.

【详解】对于 A 选项，因为 $a \equiv b \pmod{p}$，所以 $p \mid (a-b)$，同理 $p \mid (c-d)$，

所以 $p \mid [(a-b)+(c-d)]$，所以 $p \mid [(a+c)-(b+d)]$，

所以 $a+c \equiv b+d \pmod{p}$，所以 $a+c \equiv b+d \pmod{p}$，故 A 正确；

对于 B 选项，因为 $ac-bd = ac-bc+bc-bd = c(a-b)+b(c-d)$，

又 $a \equiv b \pmod{p}$ 则 $p \mid (a-b)$，$c \equiv d \pmod{p}$ 则 $p \mid (c-d)$

所以 $p \mid (ac-bd)$，所以 $ac \equiv bd \pmod{p}$，故 B 正确；

对于 C 选项，根据同余的概念与性质，p 与 q 必须互质，该选项才正确，故 C 错误；

对于 D 选项，由选项 B 可知，D 正确，

故选：ABD.

14. 单位圆内接□ABC，取 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 作边长构成新□$A'B'C'$，则（　　）

A. 能构成新□$A'B'C'$，且 $S_{\triangle A'B'C'} > \dfrac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

B. 能构成新□$A'B'C'$，且 $S_{\triangle A'B'C'} = \dfrac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

C. 能构成新□$A'B'C'$，且 $S_{\triangle A'B'C'} < \dfrac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

D. 不能构成新□$A'B'C'$

【答案】C

【解析】

【分析】利用正弦定理分析可知 $\sin A = \dfrac{a}{2}, \sin B = \dfrac{b}{2}, \sin C = \dfrac{c}{2}$，结合比例关系可知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，进而可得面积关系.

【详解】在□ABC 中，设角 A, B, C 对应的边为 a, b, c

由正弦定理可得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$，即$\sin A=\frac{a}{2},\sin B=\frac{b}{2},\sin C=\frac{c}{2}$，

即$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$，

可知能构成新□$A'B'C'$，且$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$，

所以$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}<\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

故选：C.

15. $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$，$f\left(x\right)$的导函数为$g\left(x\right)$，则（　　）

A. $g\left(-x\right)=f\left(x\right)$　　B. $g\left(-x\right)=f\left(-x\right)$

C. $g\left(-x\right)=g\left(x\right)$　　D. $g\left(-x\right)=-g\left(x\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】对$f\left(x\right)=f\left(-x\right)$两边求导可得$g\left(-x\right)=-g\left(x\right)$，C错误，D正确，举出反例得到AB错误.

【详解】CD选项，$f\left(x\right)=f\left(-x\right)$两边求导得$f'\left(x\right)=f'\left(-x\right)\cdot\left(-x\right)'=-f'\left(-x\right)$，

故$g\left(x\right)=-g\left(-x\right)$，$g\left(-x\right)=-g\left(x\right)$，C错误，D正确，

AB选项，可令$f\left(x\right)=x^2$，满足$f\left(x\right)=f\left(-x\right)$，

$f'\left(x\right)=2x$，即$g\left(x\right)=2x$，可以得到$g\left(-1\right)=-2\neq f\left(1\right)$，$g\left(-1\right)=-2\neq f\left(-1\right)$，AB错误.

故选：D

16. 在30以内的所有素数中，随机选取若干个，使得它们的和为30的概率是______.

【答案】$\frac{2}{341}$

【解析】

【分析】首先列举出30以内的所有素数，利用二项式定理求出总数，求解出结果.

【详解】30以内的所有正素数为2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，

随机选取共有$2^{10}-1=1023$个，和为30的情况为$\{7,23\}$，$\{11,19\}$，$\{13,17\}$，$\{2,5,23\}$，$\{2,11,17\}$，

$\{2,3,5,7,13\}$故所求概率$=\frac{6}{1023}=\frac{2}{341}$.

17. $g\left(x\right)=f\left(x\right)\left(x^2-x+1\right)$，则$f\left(0\right)=0$是$g\left(x\right)$在$x=0$处可导的（　　）

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】D

【解析】

【分析】从充分性和必要性两个方面进行推到论证即可.

【详解】充分性：

若 $f(0)=0$，

$g'(x)=f'(x)(x^2-x+1)+f(x)(x^2-x+1)'=f'(x)(x^2-x+1)+f(x)(2x-1)$

所以 $g'(0)=f'(0)-f(0)=f'(0)$，因此 $g(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，还需要看 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，因此不具备充分性；

必要性：

$g'(x)=f'(x)(x^2-x+1)+f(x)(x^2-x+1)'=f'(x)(x^2-x+1)+f(x)(2x-1)$

$g'(0)=f'(0)-f(0)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 处可导只能代表 $f'(0)-f(0)$ 有意义，不能得出 $f(0)=0$，因此不具备必要性；

故选：D.

18. 若正整数 x 满足 $x\equiv 2(\bmod 7)$，$x\equiv 3(\bmod 5)$，$x\equiv 2(\bmod 3)$，如果 $x<100$，则 x 是否唯一确认？若 $100<x<200$，则 x 是否唯一确定？若 $200<x<300$，则 x 是否唯一确定？（　　）

A. 若 $x<100$，则 x 是唯一.确认；其他均不唯一

B. 若 $100<x<200$，则 x 是唯一确认；其他均不唯一

C. 若 $200<x<300$，则 x 是唯一确认；其他均不唯一

D. 三个都唯一

【答案】D

【解析】

【分析】由中国剩余定理得到 $x=23+105k$，$k\in\mathrm{N}$，从而作出判断.

【详解】由中国剩余定理可得 $x=23+105k$，$k\in\mathrm{N}$，$x<100$，x 可以唯一确定 $x=23$；若 $100<x<200$，x 可以唯一确定 $x=128$；若 $200<x<300$，x 可以唯一确定 $x=233$.

故选：D

19. 已判断自然数集与以下哪些数集等势（　　）

A. 实数集　　B. 整数集　　C. 无理数集　　D. 以上均是

【答案】B

【解析】

【分析】由等势集的定义可以判断

【详解】若存在从集合 A 到集合 B 的一一对应，则称 A 与 B 等势，相应地，称 A、B 为等势集，根据定义与自然数集对等的集合称为可列集，即集合元素可列举，

故选：B.

20. 已知定义在 I 内的函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f''\left(x\right)>0$，若 $f'\left(x\right)>0$，对于 $\forall a$，$b\in I$，比较 $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ 与 $\frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$ 的大小关系（　　）

A. $\frac{f(a)+f(b)}{2}>\frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$

B. $\frac{f(a)+f(b)}{2}<\frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$

C. $\frac{f(a)+f(b)}{2}\geq\frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$

D. $\frac{f(a)+f(b)}{2}\leq\frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$

【答案】A

【解析】

【分析】作差后，利用函数的导数可知函数下凸，即可得出差的正负，得出结论.

【详解】

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]=\frac{f(a)+f(b)}{3}-\frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{2}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

由 $f''(x)>0$，故由 jensen 不等式可得 $\frac{f(a)+f(b)}{2}>f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，

故 $\frac{f(a)+f(b)}{2}>\frac{1}{6}\left(f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$.

故选：A