# 2023 年复旦大学数学英才班选拔考试试题

1.

设$x=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$是$(1,2,3,\cdots,n)$的一个全排列（$n\geq 2$），设

$$S(x)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\cdots+x_{n-1}x_n$$

求$S(x)$的最小值及此时的$x$.

2.

是否存在函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，满足对$x$，$y\in\mathbb{R}$，恒有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+|x-y|?$$

证明你的结论.

3.

对正整数$n$，$k$，$d$，记$m(d,k,n)$为满足下列条件的$(a_1,\cdots,a_d)$的组数：

①$0\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_d\leq k$;

②$a_1+a_2+\cdots+a_d=n$.

求证：$m(d,k,n)=m(k,d,n)$.

4.

求所有的点$P$，使得过点$A(1,1)$，$B(1,-1)$，$C(-1,1)$，$D(-1,-1)$和$P$的圆锥曲线$\Gamma$唯一.

5.

回答下列问题：

（1）用$\sin 18°$表示$\cos 36°$;

（2）求$\sin 18°$;

（3）若给定长度为1，$a$的线段，简述尺规作图作出长为$\sqrt{a}$的线段的步骤;

来（4）简述尺规作图作出正五边形的步骤.

# 2023 年复旦大学数学英才班选拔考试试题解答

**解：** 对任意满足题目条件的$\underline{x}$，我们构造$\underline{x}^{(1)}$，$\underline{x}^{(2)}$，$\cdots$如下：

Step 1：考虑数字$n$，若$n$在$\underline{x}$的第一位，取$\underline{x}^{(1)}=\underline{x}$；若$n$不在$\underline{x}$的第一位，而在第$i$位，即

$$\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},n,x_{i+1},\cdots,x_n),$$

定义$\underline{x}^{(1)}$的前$i$个分量为把$\underline{x}$的前$i$个分量颠倒放置，后$n-i$个分量不变，即

$$\underline{x}^{(1)}=(n,x_{i-1},\cdots,x_2,x_1,x_{i+1},\cdots,x_n).$$

则

$$S(\underline{x})-S(\underline{x}^{(1)})=nx_{i+1}-x_1x_{i+1}=(n-x_1)x_{i+1}>0.$$

Step 2：考虑数字$n-1$，若$n-1$在$\underline{x}^{(1)}$的第$n$位，取$\underline{x}^{(2)}=\underline{x}^{(1)}$；若$n-1$不在$\underline{x}^{(1)}$的第$n$位，而在第$i$位（这里的$i$跟Step 1的$i$不一样），即

$$\underline{x}^{(1)}=(n,x_2^{(1)},\cdots,x_{i-1}^{(1)},n-1,x_{i+1}^{(1)},\cdots,x_{n-1}^{(1)},x_n^{(1)}).$$

定义$\underline{x}^{(2)}$的前$i-1$个分量不变，后$n-1-i$个分量为把$\underline{x}$的后$n-1-i$个分量颠倒放置，即

$$\underline{x}^{(2)}=(n,x_2^{(1)},\cdots,x_{i-1}^{(1)},x_n^{(1)},x_{n-1}^{(1)},\cdots,x_{i+1}^{(1)},n-1).$$

则

$$\begin{aligned}S(\underline{x}^{(1)})-S(\underline{x}^{(2)})&=(n-1)x_{i-1}^{(1)}-x_n^{(i)}x_{i-1}^{(1)}\\&=(n-1-x_n^{(i)})x_{i-1}^{(1)}>0.\end{aligned}$$

Step 3：考虑数字1，若1在$\underline{x}^{(2)}$的第2位，取$\underline{x}^{(3)}=\underline{x}^{(2)}$；若1不在$\underline{x}^{(2)}$的第2位，而在第$i$位（这里的$i$跟Step 2的$i$不一样），即

$$\underline{x}^{(2)}=(n,x_2^{(2)},x_3^{(2)}\cdots,x_{i-1}^{(2)},1,x_{i+1}^{(2)},\cdots,x_{n-1}^{(2)},n-1).$$

定义$\underline{x}^{(3)}$的前$i$个分量不变，后$n-i$个分量为把$\underline{x}$的后$n-i$个分量颠倒放置，即

$$\underline{x}^{(3)}=(n,1,x_{i-1}^{(2)},\cdots,x_3^{(2)},x_2^{(2)},x_{i+1}^{(2)},\cdots,x_{n-1}^{(2)},n-1).$$

则

$$\begin{aligned}S(\underline{x}^{(2)})-S(\underline{x}^{(3)})&=(nx_2^{(2)}+1\cdot x_{i+1}^{(2)})-(n\cdot 1+x_2^{(2)}\cdot x_{i+1}^{(2)})\\&=(n-x_{i+1}^{(2)})(x_2^{(2)}-1)>0.\end{aligned}$$

这样一直下去，最终可以构造出

$$\begin{aligned}\underline{x}^{(4)}&=(n,1,*,*,\cdots,*,2,n-1),\\\underline{x}^{(5)}&=(n,1,n-2,*,\cdots,*,2,n-1),\\&\vdots\\\underline{x}^{(n)}&=(n,1,n-2,3,\cdots,4,n-3,2,n-1).\end{aligned}$$

并且满足

$$S(\underline{x})\geq S(\underline{x}^{(1)})\geq S(\underline{x}^{(2)})\geq\cdots\geq S(\underline{x}^{(n)}).$$

即对$\{1,2,\cdots,n\}$的任意置换$\underline{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，都有

$$S(\underline{x})\geq S(\underline{x}^{(n)}).$$

所以，$S(x)$的最小值在$x=x^{(n)}$取到.

最小值：当$n=2k$为偶数时，最小值为

$$\sum_{i=1}^{k}(n+1-2i)\cdot 2i+\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)(n-2i)=\frac{k}{3}(4k^2+2).$$

当$n=2k+1$为奇数时，最小值为

$$\sum_{i=1}^{k}i(n+1-i)+\sum_{i=1}^{k-1}i(n-1-i)+k(k+1)=\frac{k}{3}(4k^2+6k+5).$$

2.

**答：** 不存在．如果存在这样的$f$，定义$g(x)=f(x)-f(0)$，则$g(0)=0$，并且

$$\frac{g(x)+g(y)}{2}\geq g\left(\frac{x+y}{2}\right)+|x-y|. \qquad (*)$$

取$y=0$，则

$$\begin{aligned} g(x) &\geq 2g(\frac{x}{2})+2|x| \\ &\geq 4[g(\frac{x}{4})+2\frac{|x|}{2}]+2|x| \\ &= 4g(\frac{x}{4})+4|x| \\ &\geq \cdots \geq 2^n g(\frac{x}{2^n})+2n|x|. \end{aligned}$$

其中$n$是任意的正整数，$x\in\mathbb{R}$．所以把上述$x$换成$-x$，相加可得

$$g(x)+g(-x)\geq 2^n\left[g(\frac{x}{2^n})+g(-\frac{x}{2^n})\right]+2n\cdot 2|x|.$$

另一方面，在$(*)$中取$y=-x$，则

$$g(x)+g(-x)\geq 4|x|.$$

把$x$换为$\frac{x}{2^n}$，可得

$$g(\frac{x}{2^n})+g(-\frac{x}{2^n})\geq\frac{4|x|}{2^n}.$$

所以

$$g(x)+g(-x)\geq 4|x|+2n\cdot 2|x|,$$

即对任意正整数$n$，都有

$$g(x)+g(-x)\geq (4n+4)|x|.$$

我们让$x=1$，可得

$$g(1)+g(-1)\geq 4n+4.$$

但是左边是有限的数，右边的正整数$n$可以是任意的，让$n\to\infty$即可得出矛盾.

3．

**证明：** 定义集合$A(d,k,n)$为

$$\{(a_1,\cdots,a_d)|满足0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_d\le k且a_1+a_2+\cdots+a_d=n\}.$$

只需构造集合$A(d,k,n)$到集合$A(k,d,n)$的一一映射．

设$(a_1,\cdots,a_d)\in(d,k,n)$，把1作如下排列：第$i$行有$a_i$个1，得到一个包含很多1的数阵．例如，$(0,1,1,2,4)\in(5,5,8)$就是如下排列：

$$\begin{array}{lcccc}
a_1: & & & & \\
a_2: & 1 & & & \\
a_3: & 1 & & & \\
a_4: & 1 & 1 & & \\
a_5: & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1
\end{array}$$

定义映射$f:A(d,k,n)\to A(k,d,n)$如下：把$f(a_1,\cdots,a_d)=(b_1,\cdots,b_k)$定义为：$b_i$是上述数阵中第$k+1-i$列的$k$的个数．

我们来说明这样的定义是合理的：

①根据上述定义方式，$b_i$是$a_1,\cdots,a_d$中大于等于$k+1-i$的正整数的个数，即

$$b_i=\text{card}\{i|a_i\ge k+1-i\}.$$

于是$0\le b_1\le b_2\le\cdots\le b_k$．因为每一列最多只可能有$d$个1，因此$b_k\le d$．

②根据上述定义方式，把这个数阵中的1按行去数和按列去数，得到的1的总数相同，因此

$$b_1+\cdots+b_k=a_1+\cdots+a_d=n.$$

因此$(b_1,\cdots,b_k)\in A(k,d,n)$，即$f$定义合理．

再来证明$f$是单射．如果$f(a_1,\cdots,a_d)=f(c_1,\cdots,c_d)=(b_1,\cdots,b_k)$，则$(a_1,\cdots,a_d)$与$(c_1,\cdots,c_d)$对应的数阵中，每一列的1的个数相同．

第1列的1的个数相同，表明$(a_1,\cdots,a_d)$与$(c_1,\cdots,c_d)$中0的个数相同；

第2列的1的个数相同，表明$(a_1,\cdots,a_d)$与$(c_1,\cdots,c_d)$中1的个数相同；

$\cdots$

第$k$列的1的个数相同，表明$(a_1,\cdots,a_d)$与$(c_1,\cdots,c_d)$中$k-1$的个数相同．

而根据②，$(a_1,\cdots,a_d)$与$(c_1,\cdots,c_d)$中$k$的个数相同．

因此我们证明了$f$是单射，从而由$f(A(d,k,n))\subseteq A(k,d,n)$可得

$$\text{card}(A(d,k,n))=\text{card}(f(A(d,k,n)))\le\text{card}(A(k,d,n)).$$

上述不等式对任意正整数$k$和$d$都成立，可交换$k,d$的位置，得到

$$\text{card}(A(k,d,n))\le\text{card}(A(d,k,n)).$$

因此

$$m(k,d,n)=\operatorname{card}(A(k,d,n))=\operatorname{card}(A(d,k,n))=m(d,k,n).$$

4.

**解：** 设圆锥曲线$\Gamma: a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0$．代入$A,B,C,D$可得

$$\begin{aligned}
a_{11}+a_{12}+a_{22}+b_1+b_2+c=0, &\qquad ①\\
a_{11}-a_{12}+a_{22}+b_1-b_2+c=0, &\qquad ②\\
a_{11}-a_{12}+a_{22}-b_1+b_2+c=0, &\qquad ③\\
a_{11}+a_{12}+a_{22}-b_1-b_2+c=0, &\qquad ④
\end{aligned}$$

由②③得$b_1-b_2=0$；由①④得$b_1+b_2=0$，因此$b_1=b_2=0$．再由①②可得$a_{12}=0$．所以满足条件的圆锥曲线形如

$$\Gamma: a_{11}x^2+a_{22}y^2+c=0.$$

由于圆锥曲线$\Gamma$过$P(m,n)$和$A(1,1)$，则

$$\begin{cases}a_{11}m^2+a_{22}n^2=-c,\\ a_{11}+a_{22}=-c.\end{cases}$$

本题相当于找所有的$P(m,n)$使得上述关于$a_{11}$，$a_{22}$的方程具有唯一解． 这个方程组的系数矩阵是$\begin{bmatrix}m^2 & n^2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，行列式为$m^2-n^2$．故只要$m^2-n^2\neq 0$，即$|m|\neq|n|$，方程组存在唯一解．

综上，$P$的所有可能取值是$\{(m,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:|m|\neq|n|\}$．特别地，可以证明，当$(|m|-1)(|n|-1)>0$时，圆锥曲线是双曲线；当$(|m|-1)(|n|-1)<0$时，圆锥曲线是椭圆（或圆）．

5.

(1)$\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ$.

(2)设$x=\sin 18^\circ$，则$0<x<\dfrac{1}{2}$，且$\cos 36^\circ=1-2x^2$，则$\sin 72^\circ=2\sin 36^\circ\cos 36^\circ=4\sin 18^\circ\cos 18^\circ\cos 36^\circ$．另一方面，$\sin 72^\circ=\cos 18^\circ$，因此

$$4\sin 18^\circ\cos 36^\circ=1,$$

即$4x(1-2x^2)=1$，即$8x^3-4x+1=0$①．另一方面，

$$\cos 72^\circ=2\cos^2 36^\circ-1=2(1-2x^2)^2-1=8x^4-8x^2+1.$$

由于$\cos 72^\circ=\sin 18^\circ$，故得到方程$8x^4-8x^2-x+1=0$②，由①，$8x^4=4x^2-x$，则$8x^2+x-1=4x^2-x$，即$4x^2+2x-1=0$．即$4(x+\dfrac{1}{4})^2=\dfrac{5}{4}$，所以$x+\dfrac{1}{4}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{4}$（负根舍去），得

$$x=\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

(3)把这个步骤拆成许多基本步骤如下：设$a>b$．

①延长线段或截取线段：设直线$l_1$上的线段$AB$的长度为$a$，线段$CD$的长度为$b$，延长$AB$到射线$AB'$，以$B$为圆心、$b$为半径作圆，这个圆与$AB'$的交点记为$E, E'$（$E'$在线段$AB'$上），则线段$AE$长为$a+b$，线段$AE'$长为$a-b$.

②过一点作直线$l_1$的垂线：直线$l$上有三点$A$，$B$，$E$，以$B$为圆心、$BE$为半径画圆，交直线$l$于$F$，再分别以点$E$、$F$为圆心，$|EF|$为半径画圆，两个圆的圆弧交于两点$G$，$H$，则$GH\perp l_1$. 记$GH$所在的直线为$l_2$，且$GH$与直线$l_1$交于点$Q$.

③取中点：以线段$AE$的两端为圆心、$|AE|$为半径画圆，交于$J, K$两点，连接$JK$，则$JK$与$AE$的交点$O$就是$AE$的中点.

④以$O$为圆心、$|OE|$为半径画圆，交直线$l_2$于$P$，于是$|PQ|=\sqrt{a+b}$.

(4)**【说明】下面的步骤不是最简便的，最简便的方法是用黄金三角形的相似性.**

任取一点$O$，画一个圆（把这个圆视作单位圆，半径为1）. 我们只需在这个圆上找五个点$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$，使得$\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=\angle A_3OA_4=\angle A_4OA_5=\angle A_5OA_1=72^\circ$.

先在圆上任取一点$A_1$，下面来用尺规作图找到$A_2$. 在$\triangle A_1OA_2$中，根据余弦定理，

$$\begin{aligned}|A_1A_2|&=\sqrt{|OA_1|^2+|OA_2|^2-2|OA_1|\cdot|OA_2|\cos 72^\circ}\\&=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\\&=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.\end{aligned}$$

所以只需在圆弧上用尺规作图取$A_2$使得$|A_1A_2|=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$.

作出长度为$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$的线段步骤如下：

Step 1：利用(3)①，可以利用长度为1的线段作出长度为2的线段以及长度为10的线段；

Step 2：利用(3)的方法，可以长度为$\sqrt{5}$的线段；

Step 3：利用(3)①的方法作出长度为$10-2\sqrt{5}$的线段；

Step 4：利用(3)的方法，作出长度为$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$的线段；

Step 5：利用(3)③的方法，作出长度为$r=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$的线段.

下面再以$A_1$为圆心、$r$为半径画圆，与圆$O$交于两点，取其中一个点作为$A_2$，于是这样作出的$\angle A_1OA_2=72^\circ$.

最后，把$A_1, A_2$分别换为$A_2, A_3$，重复上述操作四次，即可得到$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$. 连接$A_1A_2$，$A_2A_3$，$A_3A_4$，$A_4A_5$，$A_5A_1$，则五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$就是正五边形.