

2022年武汉大学强基计划测试数学试题

1. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) 皆为正数, 且满足

$$\frac{1}{x_1 + 2022} + \frac{1}{x_2 + 2022} + \dots + \frac{1}{x_n + 2022} = \frac{1}{2022}$$

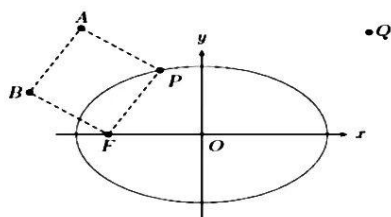
证明:

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}{n-1} \geq 2022$$

2. 设 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左焦点, P 为椭圆 C 上一点

(1) 作正方形 $FPAB$ (F, P, A, B 按逆时针排列), 当 P 沿椭圆运动一周, 求动点 B 的轨迹方程

(2) 设 $Q(3, 2)$ 为椭圆外一点, 求 $|PQ| + |PF|$ 的取值范围



3. 已知函数 $f(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 6(3-a)x + 2022a$, 若 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的单调增函数, 求实数 a 的取值范围

4. 连续随机掷一颗骰子, 一直掷到 6 点出现 3 次为止, 用 X 表示停止时已经掷的次数

(1) 求 X 的分布列 $P(X=k)$, $k=3, 4, \dots$

(2) 令 $Y = \min(\max(X, 4), 5)$, 求数学期望 $E(Y)$

2022 年武汉大学强基计划校测数学试题答案

1. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) 皆为正数, 且满足

$$\frac{1}{x_1 + 2022} + \frac{1}{x_2 + 2022} + \dots + \frac{1}{x_n + 2022} = \frac{1}{2022}$$

证明:

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}{n-1} \geq 2022$$

证明: 由题意可知

$$\frac{2022}{x_1 + 2022} + \frac{2022}{x_2 + 2022} + \dots + \frac{2022}{x_n + 2022} = 1$$

令

$$\frac{2022}{2022 + x_n} = a_n \Rightarrow x_n = 2022\left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$$

此时等价于

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

即证

$$\frac{\sqrt[n]{2022^n \left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{a_2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{a_n} - 1\right)}}{n-1} \geq 2022$$

等价于证

$$\frac{(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)}{a_1 a_2 \dots a_n} \geq (n-1)^n$$

由均值不等式可知

$$1 - a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq (n-1) \sqrt[n-1]{a_2 a_3 \dots a_n}$$

$$1 - a_2 = a_1 + a_3 + \dots + a_n \geq (n-1) \sqrt[n-1]{a_1 a_3 \dots a_n}$$

⋮

$$1 - a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq (n-1) \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$$

则

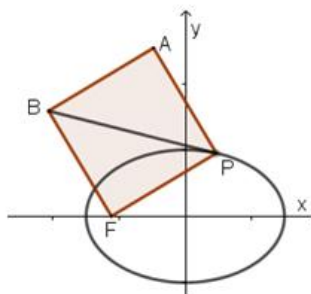
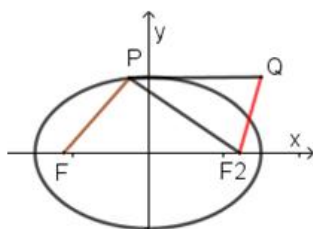
$$\frac{(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)}{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{(n-1)^n a_1 a_2 \dots a_n}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)^n$$

证毕!

2.

设 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左焦点, P 为椭圆 C 上一点.

- (1) 作正方形 $FPAB$ (F, P, A, B 按逆时针排列), 当 P 沿椭圆运动一周, 求动点 B 的轨迹方程;
- (2) 设 $Q(3, 2)$ 为椭圆外一点, 求 $|PQ| + |PF|$ 的取值范围.



首先来解决第二问: 见上左图.

显然当 F, P, Q 三点共线时, $|PQ| + |PF|$ 取最小值 $|FQ|$,

$$\text{且 } |FQ| = \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2 + 2^2} = \sqrt{18 + 6\sqrt{5}} = \sqrt{15} + \sqrt{3};$$

设椭圆的右焦点为 F' , 结合椭圆的定义知: $|PF| + |PF_2| = 6$,

$$\text{则 } |PQ| + |PF| = 6 + |PQ| - |PF_2| \leq 6 + |QF_2| = 6 + \sqrt{15} - \sqrt{3}.$$

于是, $|PQ| + |PF|$ 的取值范围是 $[\sqrt{15} + \sqrt{3}, 6 + \sqrt{15} - \sqrt{3}]$.

对于第一问：见上中图，为了体现一般性，直接从一般情形开始. 即：↵

已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点，P 为椭圆 C 上一点. 作正方形 FPAB ↵

(F, P, A, B 按逆时针排列)，当 P 沿椭圆运动一周，求动点 B 的轨迹方程. ↵

我们开始解题吧！设 B (x, y), P (m, n) ↵

↵

思路一：可借助向量工具，利用相关点代入法求解. ↵

$\overrightarrow{FP} = (m + c, n), \overrightarrow{FB} = (x + c, y)$ ，由已知可得： $|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{FB}|$ 且 $\overrightarrow{FP} \perp \overrightarrow{FB}$ ↵

即：
$$\begin{cases} (m + c)(x + c) + ny = 0 \dots\dots\dots (1) \\ (m + c)^2 + n^2 = (x + c)^2 + y^2 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$
 ↵

(1)式两边平方，得： $\frac{[(m+c)(x+c)]^2}{y^2} = n^2 \dots\dots\dots (3)$ ，把(3)代入(2)整理得到： ↵

$n^2 = (x + c)^2$ ， $(m + c)^2 = y^2$ ，则： $m = y - c$ ↵

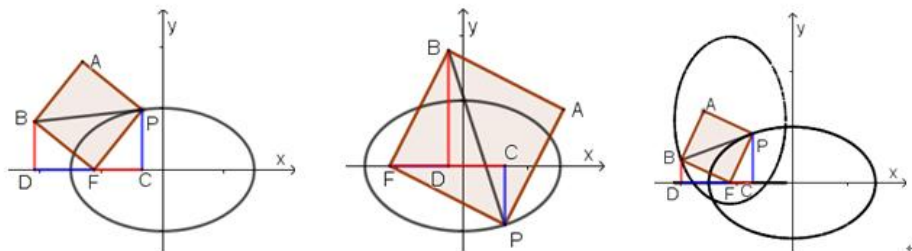
由 P (m, n) 在椭圆上，把上述 m, n 的之代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，可得到： ↵

$\frac{(y-c)^2}{a^2} + \frac{(x+c)^2}{b^2} = 1$ ，即为所求轨迹方程. ↵

说明上述计算过程繁杂，消元处理起来较为困难. ↵

思路二：几何法

充分发掘题意的本质，利用几何关系找出 B, P 两点间的坐标关系。如下图所示



分别过点 B、P 作 x 轴的垂线，垂足分别为 D、C。

有平面几何知识易知：Rt△BDF 与 Rt△FCP 全等，转化为对应的坐标关系：

$$\begin{cases} y = c - m \\ n = -c - x' \end{cases}, \text{即: } \begin{cases} m = c - y \\ n = -c - x' \end{cases}, \text{代入椭圆的方程可得: } \frac{(y-c)^2}{a^2} + \frac{(x+c)^2}{b^2} = 1.$$

轨迹图形见上右图椭圆。

在上述处理过程中，充分利用几何元素间的数量关系，绕开繁杂的计算，极大地简化计算，

这也表明审题是非常重要的。

【2022 年武大强基第 2 题】的结果为： $\frac{(y-\sqrt{5})^2}{9} + \frac{(x+\sqrt{5})^2}{4} = 1.$

3. 解析：

$f'(x) = 6(x^2 + ax + 3 - a) \geq 0$ 在 $[-2, 2]$ 恒成立

$$\textcircled{1} \begin{cases} -\frac{a}{2} < -2 \\ f'(-2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} -2 \leq -\frac{a}{2} \leq 2 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} -\frac{a}{2} \geq -2 \\ f'(2) \geq 0 \end{cases}$$

解得： $a \in [-7, 2]$

4. 解: (1) $P(X=k) = C_{k-1}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-3} \cdot \frac{1}{6} = C_{k-1}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-3}$, 列表略

(2) $X=3, 4$ 时, $Y=4$; $X \geq 5$ 时, $Y=5$;

$$P(Y=4) = P(X=3) + P(X=4) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{7}{432}$$

